Шифр: 10-24

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Тихвинский

Школа МОУ „СОШ №1"

Класс 10 А

ФИО Сутягин Ян Гагикович

Чистовик

10-24

1	2	3	4	5	Σ
7	X	7	0	0	14

(10.1) Пусть $\overline{abcd}$ – искомое четырёхзначное число

По условию: $(a+b+c+d)\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d=3990$

Представим 3990 в виде произведения ~~простых~~ ~~множителей~~ чисел.

$3990=3\cdot1330=3\cdot10\cdot133=3\cdot2\cdot5\cdot7\cdot19=1\cdot6\cdot5\cdot7\cdot19$ ($3\cdot2$ я заменил на $1\cdot6$, т.к. $3\cdot2=6=1\cdot6$)

Заметим, что $1+6+5+7=19$

Получается $(1+6+5+7)\cdot1\cdot6\cdot5\cdot7=19\cdot1\cdot6\cdot5\cdot7=3990$

Следовательно цифры: 1; 6; 5; 7 будут являться цифрами искомого четырёхзначного числа.

Например число: $\overline{abcd}=1657$, где $a=1$; $b=6$; $c=5$; $d=7$

Ответ: 1657.

(10.3.)

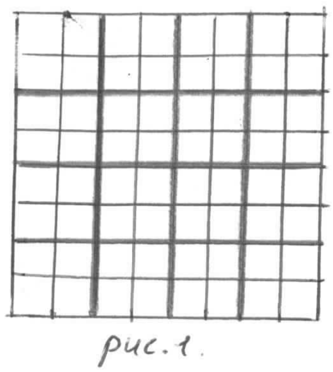


рис.1.

Ответ: Дима

Решение: После первого хода Коли, Дима мысленно разбивает доску (8x8) на 16 квадратов, размером 2x2, как это сделанно на рис.1. В одном из этих квадратов обязательно будет первый крестик Коли. Причём при любом расположении этого крестика в этом квадрате, ~~так Дима сможет~~ найдётся пара соседних по стороне не заполненых крестиком клеток. т.е. Дима сможет сделать ход.

И после хода Димы в этом квадрате останется 1 пустая клетка.

Аналогичным образом будут заполнятся остальные пустые квадраты 2x2.

В какой-то момент Коля заполнит крестиком, оставшуюся одну пустую клетку в каком-то из квадратов 2x2.

Чистовик

10-24

Продолжение 10.3.

Тогда после такого хода Коли, Дима накроет доминон две оставшиеся клетки в этом квадрате 2x2. Он сможет это сделать, т.к. в двух оставшихся клетках, суммарно число крестиков равно 2. 

Получается в каждом квадрате последний ход будет Димы, а значит и во всей игре последний ход после которого не останется свободных клеток сделает Дима. И Коля уже не сможет сделать ход и значит проиграет.

10.4 Д-во: 1) Ближайшее простое число >3, это 5, значит $p \geq 5$.

~~2) Т.к. $y < \frac{p}{2}$, где $p \geq 5$, то $y < \frac{5}{2} = 2,5$, причём $y \in N$ следовательно $y \leq 2$. Поэтому либо $y=1$, либо $y=2$~~

~~3) Пусть $py+1 = a \cdot b$, где $a \in Z$, $a > y$ и $b \in Z$, $b > y$ Следовательно $a \geq 3$, $b \geq 3$~~

2) Все простые числа в нашем случае, где $p \geq 5$ - нечётные. Поэтому $(p-1)$ нечётное, зн. $(p-1) \vdots 2$

~~$\frac{p}{2} = x + \frac{1}{2}$, зн. $y < \frac{p-1}{2}$, где $y \in N$~~

~~где $x \in N$~~

$\frac{p}{2} \leq y + \frac{1}{2}$, зн. $y \leq \frac{p-1}{2}$, где $y \in N$, отсюда $2y \leq p-1$.

3) $py+1$ невозможно представить в виде произведения двух чисел, где $py+1 = ab$, $a \in Z$; ~~$a <$~~ ~~$a < y$~~ $a > y$; $b \in Z$, ~~$b < y$~~ $b > y$, тогда, когда $(py+1)$ - простое число, в таком случае оно может представляться в виде произведения двух чисел, где $a=1$; $b = p_2$ $(p_2 > p)$ тогда $a \leq y$, что ~~противоречит условию~~ невозможно, т.к. $a > y$.

4) Найдём такое y, что $p \cdot y + 1 = p_2$ ~~$+1$~~

Чистовик

Продолжение 10.4.

$p\cdot y = p_2 - 1$, значит $y = \frac{p_2-1}{p}$, где $p_2 = y\cdot p + 1$ почему это простое

Проверим условие, что $y \leq \frac{p-1}{2}$, т.е. $\frac{p_2-1}{p} \vee \frac{p-1}{2}$ $|\cdot 2\cdot p$

$2p_2 - 2 \vee p^2 - p$

$2y\cdot p + 2 - 2 \vee p^2 - p$ $|:p$

$2y \overset{\leq}{\vee} p-1$

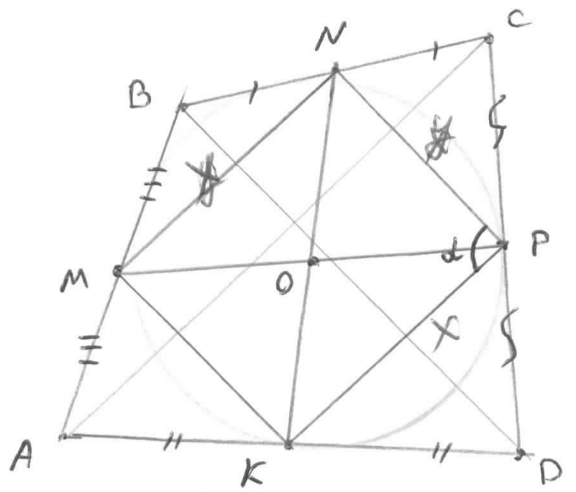
(следует из п.2)

поэтому $\frac{p_2-1}{p} \leq \frac{p-1}{2}$

Таким образом мы доказали, что найдётся натуральное число y, удовлетворяющее всем условиям.

ч.т.д.

10.5



Дано: $ABCD$ - описан.

N сер. BC; K сер. AD

Д-ть: d окр $\omega \leq NK$

Д-во: 1) Отметим M сер. AB

P сер CD

MN сред. лин. $\triangle ABC$

(т.к. M сер. AB, N сер. BC)

зн. $MN = \frac{1}{2}AC$, $MN \parallel AC$

KP сред. лин. $\triangle ACD$

(т.к. P сер. CD; K сер. AD)

зн. $KP = \frac{1}{2}AC$, $KP \parallel AC$ зн. $KP = MN$, $KP \parallel MN$

Аналогично для NP в $\triangle BCD$ и MK в $\triangle ABD$

Получается $MNPK$ - параллелограмм, т.к. противоп. стороны попарно равны и параллельны.

2) Пусть $BD = 2y$; $AC = 2x$, тогда $NP = y$; $KP = x$

В $\triangle NPK$ по теореме косин. $NK = y^2 + x^2 - 2yx\cdot\cos\alpha$

3) NK и MP пересекаются в т. O, центр окружности ω

диаметр окр. можно выразить через диагонали BD и AC, и сравнить с NK.

Зиз 3

Шифр: 2-10-07

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Тихвинский

Школа МОУ „СОШ № 1"

Класс 10 А

ФИО Сутягин Ян Гагикович

6	7	8	9	10	Σ
7	0	1	0	×	8

(10.6) Ответ: Да, можно

Решение: 1) На доске написано: $\cos x$.
т.к. выражения можно использовать несколько раз,
то первым действием: $\cos x \cdot \cos x = \cos^2 x$
и допишем $\cos^2 x$ на доску
~~Вт~~ теперь на доске имеем $\cos x$ и $\cos^2 x$
Вторым действием сложим их, и подставим $x=\pi$

+

$$\cos x + \cos^2 x = \cos \pi + \cos^2 \pi = -1 + (-1)^2 = \cancel{\phi} -1+1=0$$

Убеждаемся, что мы получили выражение, которое при $x=\pi$ принимает значение 0.

(10.8) Ответ: Да, можно.

Д-во: 1) ax^2+bx+c – квадратный трёхчлен
по теореме Виетта

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$$

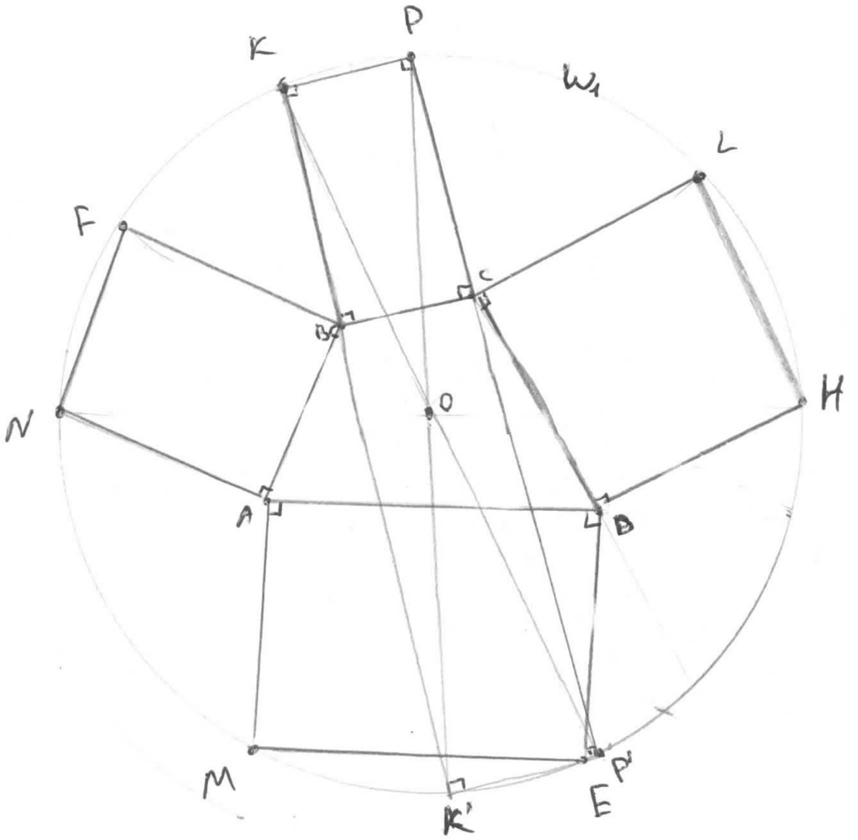
т.к. по условию корни должны быть целыми, то $-\frac{b}{a}\in Z$
также по условию коэффициенты $\in N$, т.е. $b\in N$; $a\in N$
поэтому $b \vdots a$
значит представим $b=p\cdot a$
где $p\in N$
значит $b>a$
→ ~~значит $b>c>a$~~

аналогично $\frac{c}{a}\in Z$
т.к. $c\in N$; $a\in N$, то $c \vdots a$
представим $c=a\cdot m$, значит $c>a$
где $m\in N$

2) Квадратный трёхчлен имеет два различных корня, когда $D>0$, т.е. $b^2-4ac>0$, т.е. $b^2>4ac$
Это условие должно быть верно для всех n трёхчленов.
т.е. $n\cdot b^2>4\cdot n\cdot a\cdot n\cdot c$
$p_{max}=3n$; $m_{max}=2n$
$n\cdot a^2p^2>4n^2a^2m$
$p^2>4n\cdot m$; $9n^2>8n^2$ верно
Следовательно все n трёхчлена, могут иметь два различных целых корня, при данном условии, значит вместо $3n$ можно поставить ~~последовательность~~ из $3n$ последов. натур. чисел.

10.7

Д-ть: ABCD - вписанный



Д-во: 1) Продлим KB и PC до пересеч. с окр. ω_1 (большой) получим K' и P' соответственно.
KPP'K' ~~впис~~ вписанный и это прямоугольник его диагонали пересекают. в центре окр. ω_1 аналогично для остальных прямоугольников.
(KP' диаметр, т.к. $\angle KPP' = 90°$
PK' диаметр, т.к. $\angle K'KP = 90°$)

2) ABCD вписанный, если $\angle B + \angle D = 180°$ и $\angle C + \angle A = 180°$
Вокруг ~~т.~~ B: $360° = 90° + 90° + \angle B + \angle FBK$, т.е. $\angle B + \angle FBK = 180°$
аналогично для остальных точек
поэтому ABCD вписан в том случае, если $\angle FBK = \angle D$

10.9 Да, может (ответ)